Feuille suite

Coller ici
votre code barre

Exercice 1 : Jet d'eau sur une aube

1) l'écoulement est uniforme sur chaque section
⇒ débit est constant

2) débit = Vitesse x Section

$Q_v = V_i \times S_i$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_0 = Q_v / S_0 \\ V_1 = Q_v / S_1 \\ V_e = Q_v / S_e \end{cases} \quad \text{AN} \begin{cases} V_0 = \dots m/s \\ V_1 = \dots m/s \\ V_e = \dots m/s \end{cases}$$

3) Théorème de Bernoulli

$$\frac{\rho}{2} V_e^2 + P_e^0 + \rho g z_e = \frac{\rho}{2} V_0^2 + P_0 + \rho g z_0$$

$$\left.\begin{cases} P_e = 0\,Pa \\ V_0 \text{ connue} \\ z_0 = z_e \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{on calcul } \boxed{P_0 = \dots Pa}$$

de même

$$\frac{\rho}{2} V_e^2 + P_e + \rho g z_e = \frac{\rho}{2} V_1^2 + P_1 + \rho g z_1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = \dots\dots Pa}$$

4) Exercice 8 (série 5) avec $\begin{cases} P_1 = P_0 \\ P_2 = P_1 \end{cases}$

$$Q_v = 0 \Rightarrow \frac{\rho g \sin\alpha}{12\mu} H^3 + \frac{U}{2} H = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{U + \frac{\rho g \sin\alpha}{6} H^2 = 0}$$

6°) Tenseur des contraintes

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \tau = \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rq : toutes les composantes sont nulles sauf celles qui se trouvent à l'intersection des x et z

d'une manière générale

$$\tau = \begin{pmatrix} 2\mu \, \partial u/\partial x & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\partial u/\partial y + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 2\mu \, \partial v/\partial y & \mu\left(\partial v/\partial z + \partial w/\partial y\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 2\mu \, \partial w/\partial z \end{pmatrix}$$

* force de frottement par unité de longueur suivant x et y

Contrainte = force x section (ds ce cas section = 1 m²)

donc $\tau = F = \mu \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = \frac{-\rho g \sin\alpha}{\mu} H + \frac{U}{H} + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} H$

$$\boxed{F = \frac{-\rho g \sin\alpha}{2\mu} H + \frac{U}{H}}$$

Exercice 2 : Ecoulement entre deux plaques inclinées

+ Ecoulement stationnaire, bidimensionnel ds le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$
+ viscosité μ, masse volumique ρ
+ U : vitesse de la plaque sup $U = cte$
+ H : hauteur du fluide
+ α : angle d'inclinaison p.p à l'horizontal

1°) ① * L'écoulement est permanent $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

③ * L'écoulement est bidimensionnel ds le plan $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$

donc $\vec{V} = u\,\vec{e}_x + w\,\vec{e}_z$

or d'après l'éq de continuité : $\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\,0} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow w = 0$ * (car $w(H) = 0$ épaisseur constant)

② * Les plaques sont infinies $\Rightarrow$ aucune dependance selon x et y $\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}(z)$

finalement $\boxed{\vec{v} = u(z)\,\vec{e}_x}$

2°) Les équations de Navier-stockes

$$X : \rho\left(\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$Y : \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}} + v\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}} + w\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = \cancel{-\frac{\partial p}{\partial y}} + \cancel{\rho g_y} + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}\right)$$

$z: \rho\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + \cancel{u\frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{v\frac{\partial w}{\partial y}} + \cancel{w\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}\right)$

<u>Rq</u>: Dans les équations de Navier-stockes, on ne laisse que les composantes suivant x (c-à-dire u) qui dépendent de z

$g_x = -g \sin\alpha$

$g_z = -g \cos\alpha$

finalement
$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} + \rho g \sin\alpha = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} & (1) \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \cos\alpha = 0 & (2) \end{cases}$$

3°) $P(z=H) = P_0$

si on néglige le poids de la plaque supérieure il n'y aura aucune invariance de la pression le long de l'axe des x $\Rightarrow$ le gradient de pression suivant cet axe est nul. $\left(\frac{\partial P}{\partial x} = 0\right)$

$(2) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \cos\alpha \Rightarrow P(z) = -\rho g \cos\alpha\, z + cte$

or $P(z=H) = P_0$

$\Rightarrow \boxed{P(z) = P_0 + \rho g (H - z) \cos\alpha}$

4°) (1) $\Rightarrow \cancel{\frac{\partial P}{\partial x}}^{0} + \rho g \sin\alpha = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\rho g \sin\alpha}{\mu} z + B$$

$$\Leftrightarrow u(z) = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} z^2 + Bz + C$$

d'où $u(z) = Az^2 + Bz + C$

avec $A = -\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}$

Déterminons B et C

C.L : (*) $u(z=H) = U$

(**) $u(z=0) = 0$ (condition de non glissement)

$\Rightarrow$ (**) $\Rightarrow C = 0$

(*) $\Rightarrow B = U + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} \ldots$ $B = \frac{U}{H} + \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu} H$

finalement $\boxed{u(z) = \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}(zH - z^2) + \frac{U}{H} z}$

5°) débit volumique par unité d'épaisseur

$$Q_v = \int_0^H u(z)\,dz = \left[\frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(\frac{H}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3\right) + \frac{U}{2H}z^2\right.$$

$$= \frac{\rho g \sin\alpha}{2\mu}\left(\frac{H^3}{2} - \frac{1}{3}H^3\right) + \frac{U}{2H}H^2 = \frac{\rho g \sin\alpha H^3}{12\mu} + \frac{U}{2}$$